Euklids platoniske klasseværelse

Christian Marinus Taisbak

"Enhver der kender en smule til geometri, vil give os ret i at de anvendte fagudtryk giver et helt forkert billede af denne videnskab (*ἐπιστήμη*) ..."

Jeg citerer fra Platons skrift om Staten (527 a), hvor han udtaler sig om geometrien som en *ἐπιστήμη*. Han fortsætter:

"Fagets terminologi er på én gang latterligt absurd og ikke til at komme uden om, de taler *μάλα γελοίως τε καὶ ἀναγκαίως*. De taler jo hele tiden som om de foretager sig noget og har travlt med at kvadrere og anlægge flader og lægge ting sammen – altså udfører praktiske handlinger. Men sandheden er at geometri er et studium hvis formål er viden *τὸ μάθημα γνώσεως ἕνεκα* ... en viden som er viden om DET SOM ALTID ER, *τοῦ ἀεὶ ὄντος γνῶσις*, og ikke om noget som skabes og forsvinder igen."

Såvidt Sokrates ifølge Platon (som i øvrigt er en stor beundrer af Geometrien.) Hvem taler han om? I hvert fald ikke om Kongen af Mathematikken. EUKLID FRA ALEXANDRIA. 100 år yngre.

Lad os straks blive konkrete, lad os se noget som Euklid har skrevet. Vi tager plads i hans klasseværelse, hans auditorium.

Ikke et værksted med høvlebænk og skruestik, hvor man kan producere genstande, men langt snarere et teater, en biograf (undskyld anachronismen), hvor der kan vises billeder.

Vi må forestille os at udstyret i rummet (foruden siddepladser) er en tavle af en slags. Lad os kalde den en *πίναξ*, muligvis en λεύκωμα, en gipsplade, som der kan skrives og tegnes på.

Denne tavle repræsenterer Den geometriske plan, den scene eller arena, det geometriske theater, hvor plangeometrien udspiller sig. Det græske ord er *ἐπίπεδος ἐπιφάνεια*. Den er plan, "platt".

Den geometriske plan er en abstraktion, for den har jo ingen masse, eftersom den ikke har tykkelse, men kun længde og bredde. Men takket være vores INTUITION, kan vi udmærket forestille os denne tynde overflade.

Jeg kan godt lide at forestille mig at der også hænger belærende tavler på væggene – ligesom der i et kemilokale hænger en oversigt over DET PERIODISKE SYSTEM – nemlig en liste over definitioner og spilleregler og hvad vi ellers alle er enige om, *ὅροι, αἰτήματα, λαμβανόμενα, κοιναί ἔννοιαι.*

Der kan vi for eksempel lære at en ret linje er en linje hvor punkterne ligger i vejen for hinanden, skygger for hinanden. Og en plan er sådan en *ἐπιφάνεια*, hvor de rette linjer skygger for hinanden, en *ἐπίπεδος ἐπιφάνεια.*

Lad os kigge på den overleverede tekst til den første opgave i *Elementerne. ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας* ... at en ligesidet trekant opstilles på en begrænset ret linje ("linjestykke").

Hov mangler her ikke noget? Hvorfra kommer denne givne linje? Det ser ud som om vi bare kan lade den være dukket op, *ἔστω*, men så meget behøver vi ikke forlange – i *Dedomena* lærer vi at det er tilstrækkeligt at bede om et punkt eller to.

Hvis vi skal bruge en given linje, kan vi lade Assistenten Den Hjælpende Hånd udpege et punkt (eller to) i Planen (*εἰλήφθω δοθὲν σημεῖον*) og kalde dem givne. Så siger SPILLEREGEL nr. 1 *Når der er givet to punkter, er der også givet en ret linje der forbinder dem.*

Og på grund af dette axiom eller aithema nr. 1, kan vi nu se en ret linje, et linjestykke, for os.

I kan jo alle se den, jeres intuition fejler ikke noget. Men hvis vi gerne vil erindre linjen, kan vi lade DHH tegne et (ufuldstændigt) billede af den.

Den rette linje er jo også en abstraktion, tynd og helt lige. Den defineres som en linje hvor punkterne ligger i vejen for hinanden. Hvis man kigger på linjen fra et endepunkt, ser man kun det – for de andre ligger lige bagved.

Og det er ham tilladt at anvende et tegneredskab, linealen – men for geometriens skyld er det ikke nødvendigt.

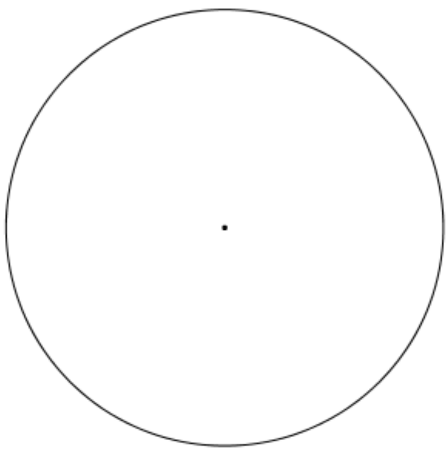
Så meget om ἔστω, om den givne rette linje - og bemærk venligst, Hr. Sokrates, at vi intet har foretaget os, det hele har været lagt i hænderne på DHH. Og han har ikke *skabt* noget, men kun udpeget to givne punkter og givet dem navne, A og B.

Det har han lov til, for Planen inderholder ligeså mange punkter som vi har brug for.

Om et givet punkt gælder at den eneste måde det kan være givet på, er ved at bestemme et sted i Planen, en POSITION. Punktet har ingen størrelse. Til gengæld kan det derefter IKKE FLYTTE SIG – en begrænsning som har generet matematikere alle dage, også mig ... indtil jeg fandt ud af at sådan må det være. Et punkt er en position. Og i den geometriske plan er der ingen tektoniske pladeforskydninger. Planen skælver ikke.

Nu har vi så et givet linjestykke. Hvad mangler vi for at have en ligesidet trekant? Yderligere to sider, som skal mødes i et toppunkt. Nu kan vi desværre ikke bare bede DHH om at udpege toppunktet (det ville være for nemt – selvom ingen af os er i tvivl om hvor det ligger. DET ER NEMLIG GIVET – EN DEL AF DET DER ER) I stedet vil vi se en maskine i funktion, en spilleregel der fremkalder lige lange linjestykker i ubegrænset mængde. Grækerne kaldte den κύκλος, en cirkel. Om den lærer vi dels en definition:

En kyklos er en plan figur begrænset af én linje (periferien). Alle rette linjer der trækkes fra et bestemt punkt inde i cirklen, er lige lange (radier).

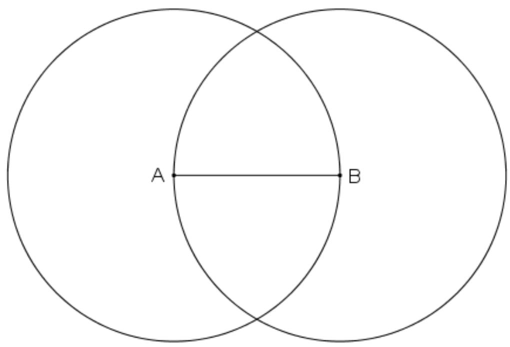


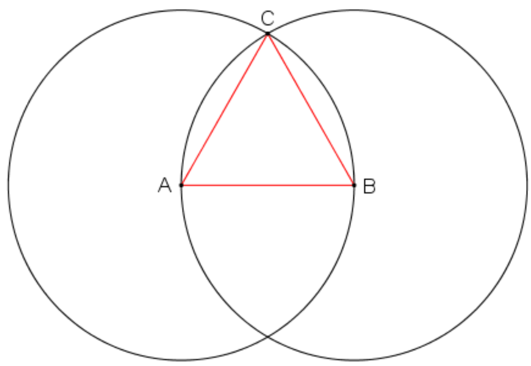
Dels en regel, et *αἴτημα: παντὶ κέντρῳ* … “at der kan tegnes en kyklos med et hvilketsomhelst centrum og en hvilkensomhelst radius.”

Det vil jeg forstå således at hvis der er givet et punkt og en afstand, så er der også givet en cirkel. Og hvis vi gerne vil fastholde intuitionens billede af den, er det tilladt at lade den tegne. Ikke fordi VI har skabt den, men fordi DEN ER.

Her er det muligt at DHH, for at tegne så overbevisende som muligt, vil fremdrage en passer og bruge den som et tilladt redskab. Men dermed tegner han naturligvis kun et uldent billede af DET DER ER, nemlig en cirkel af den definerede størrelse.

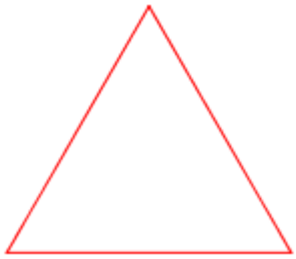
Med en cirkel kan vi nu udpege punkter der ligger ligeså langt fra A som det givne linjestykke er langt. Og med en anden cirkel … fra B …





Så vil den begavede iagttager foreslå at det søgte punkt (som vor intuition jo gjorde) må ligge på begge cirkler. Og heldigvis skærer de hinanden og har derved mindst ét punkt fælles. Her er det naturligvis meget hjælpsomt at det ses en tegning på tavlen.

Lad os læse hvad Euklid skriver: (citat fra *κέντρο μέν* ...)



Næste punkt i teksten er så argumentationen for at det resultat vi ser på tavlen, faktisk forestiller en ligesidet trekant med det givne linjestykke som basis.

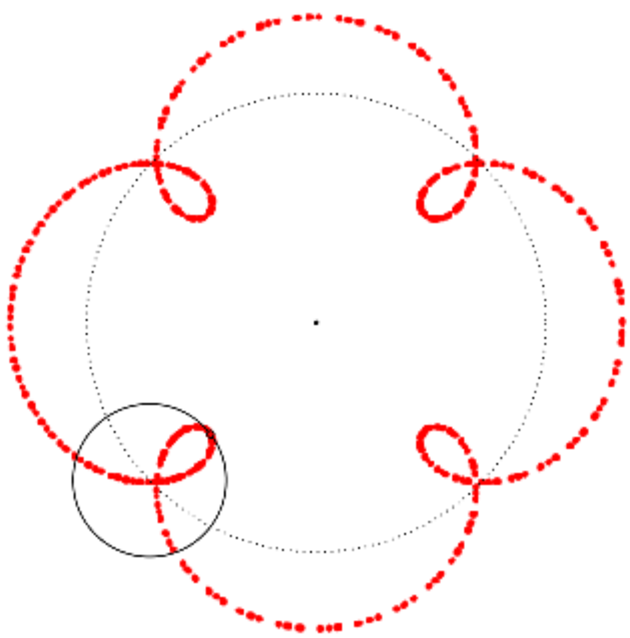
Men læg mærke til at vi slet ikke har været blandet ind i det, vi har intet foretaget os, men kun set til, mens tegningen tog fart. Faktisk véd vi ikke hvem der tegner (og det er derfor jeg har tituleret tegneren som DHH), for arbejdet er udtrykt ved passive imperativer: *γεγράφθω* som vi har svært ved at gengive i vore sprog (Lad en cirkel stå tegnet), hvorimod DET DER ER, nemlig cirklernes skæringspunkt, er udtrykt i indikativ aktiv – uberørt af os.

Der optræder sommetider et jeg eller vi i Euklids tekst. I theoremerne (læresætningerne) altid et *λέγω ὅτι* jeg påstår at ..., ofte et "vi", som fortæller hvad vi vil kunne observere, påvise ("bevise") ved en tilsvarende fremgangsmåde. Men i intet tilfælde er det mig eller os der frembringer og skaber noget.

Men hvad så med den gentagne påstand, at Euklid i sine konstruktioner og beviser kun tillader to hjælpemidler, lineal og passer. Vi har set at det er tilladt DHH at anvende dem for at forbedre en tegning, MEN DE ER IKKE NØDVENDIGE. Den begrænsning, der synes lagt på Euklidisk geometri, skyldes ikke disse mekaniske redskaber, men de geometriske objekter, de kan reproducere, NEMLIG DEN RETTE LINJE OG CIRKLEN.

Så når vi lærer at "man" ikke kan tredele en vilkårlig vinkel (mens det er en simpel ting at halvere den), skyldes det at vinklens tredjedel IKKE ER GIVET, ikke følger af den rette linjes og cirklens geometri. Betyder det så at tredelte vinkler ikke er blandt de ting DER ER? At dobbelte terninger ikke ER?

Astronomiens historie viser hvorledes det lykkedes snedige hoveder at inkludere umulige objekter og grafer i cirklens domæne, nemlig ved at fremstille planeternes uregelmæssige bevægelse på ellipser med et sindrigt system af cirkler hvis centrer rejser på mindre cirkler for enden af radier der ikke nødvendigvis udgår fra centrum. Denne disciplin, AT REDDE PHAENOMENERNE, holdt videnskabsfolk beskæftiget i et par årtusinde.



Lad os opsummere:

Vi har lært at DET DER ER, tør kaldes GIVET, i den forstand at vi må begynde med at vælge to punkter og kalde dem givne. De har dermed en fast plads i Den geometriske Plan og kan ikke flyttes – og de bestemmer et givet linjestykke, som i øvrigt er en del af en endeløs ret linje der ikke kan flyttes. I kraft af den maskine vi kalder CIRKLEN, kan hele resten af DET DER ER, det givne geometriske univers, "frembringes", dvs vises at eksistere, uafhængigt at os.

Hvem Platon / Sokrates har tænkt på med sine beklagelser over deres latterlighed, veed jeg ikke meget om – men hvordan det ellers hænger sammen: Euklid har tydeligvis anstrengt sig for at undgå prædikatet "at tænke geloios", og "at dumme sig fordi det var nødvendigt". Hans måde at skrive om matematik på har domineret Vestens videnskab lige siden, i hvert fald indtil det 20. århundrede. Hvordan idéen om DET DER ER forliges med indsigten i den menneskelige hjernes samarbejde med og inspiration af den fysiske virkelighed – kort sagt: INTUITIONEN, det må andre gøre rede for.

Men lad dette være mit bidrag i dag til rensning af Euklids rygte.